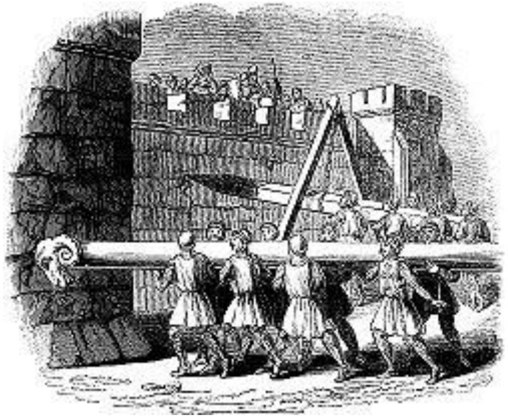
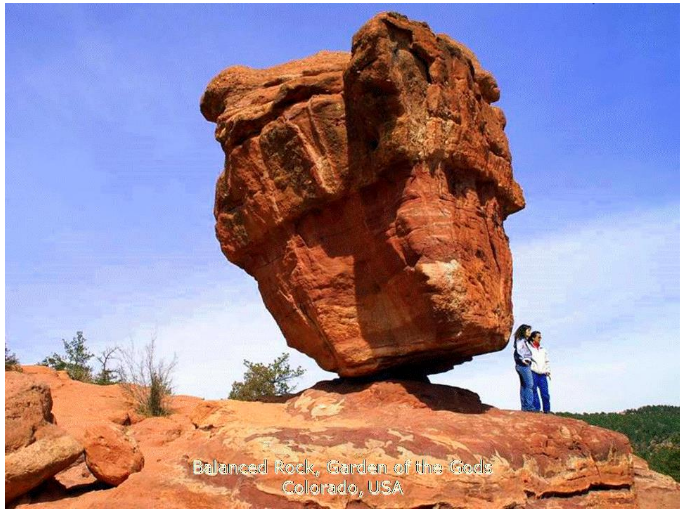
Statique du Solide





Modélisation des Actions Mécaniques

Compétences attendues :

✓ Modéliser une action mécanique.

Introduction

<u>Problématique :</u>

Dimensionner un système → Choix des dimensions + Choix du matériau + Choix des actionneurs.

Dimensionnement → Résistance du système (cas les plus défavorables) + Durée de vie.

→ Connaissance des actions mécaniques auxquelles seront soumises les différentes pièces du système.

Introduction

Durée de vie d'une pièce dépend :

- Environnement dans lequel elle se trouve
- Dimensions
- Matériau utilisé
- Actions mécaniques appliquées
- …

Actions mécaniques → mesurées :

- Construction d'un prototype
- Mise en place d'un laboratoire de mesure
- Moyens financiers importants
- …

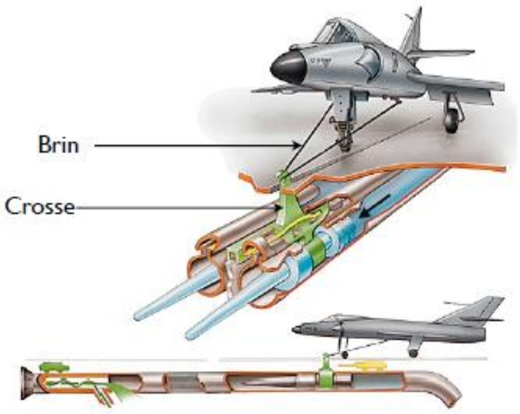
→ **PREVOIR** les actions mécaniques exercées sur un mécanisme

Introduction

Définition

Une action mécanique (AM) est un phénomène susceptible de :

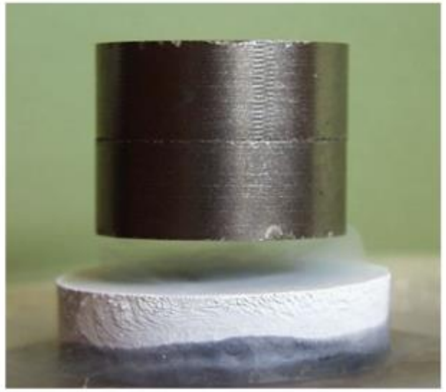
- provoquer et/ou modifier le mouvement d’un solide (modèle global),
- maintenir un solide au repos (modèle global),
- déformer un solide (modèle local).



Introduction

Classification des actions mécaniques

Actions mécaniques → nature géométrique du domaine sur lequel elles s'appliquent.



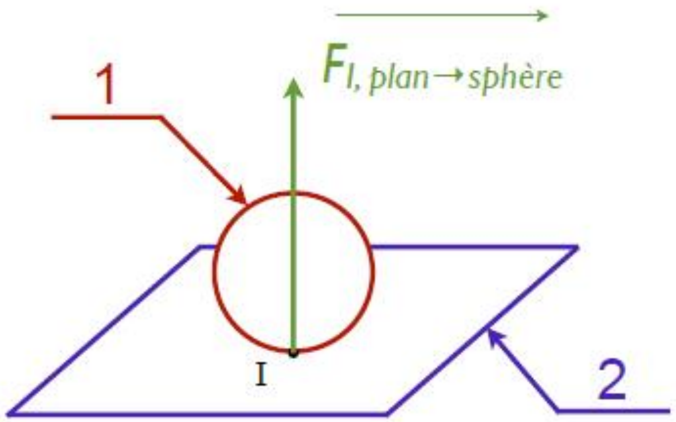
Action à distance
contact
surfacique

Action de contact
ponctuel

Action de contact
surfacique

Introduction

Représentation graphique des actions mécaniques



Action mécanique → graphiquement → flèche dont l'origine est placée en un point.

Longueur de la flèche = Intensité de l'action mécanique

Modélisation des actions mécaniques

Outil mathématique → Vecteur lié :

- la direction,
- le sens,
- la norme,
- le point d'application.

Modélisation des actions mécaniques

Le vecteur force, premier modèle

$$\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow 1}}$$

- Point d’application
- Direction
- Sens
- Intensité : unité = Newton (N)

Modélisation des actions mécaniques

Le vecteur force, premier modèle

Exemple d’action mécanique	**Valeur (N)**
Force exercée par une masse d’1 kg	10
Force exercée par un être humain de 65 kg	650
Force maximale exercée par un marteau	2000
Force maximale exercée par les quadriceps	3000
Force maximale créée par 1cm² d’un bon adhésif	10000
Force nécessaire pour casser une bonne corde d’escalade	30000

Modélisation des actions mécaniques

Le vecteur force, premier modèle

Force en un autre point ?

Modèle → Résultante et Moment.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

La résultante

La résultante induite par la force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$ appliquée en un point I par un solide 2 sur un solide 1 est un vecteur, noté $\overrightarrow{R_{2\rightarrow1}}$ qui possède :

- même direction,
- même sens,
- même intensité (en Newton) que le vecteur-force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$

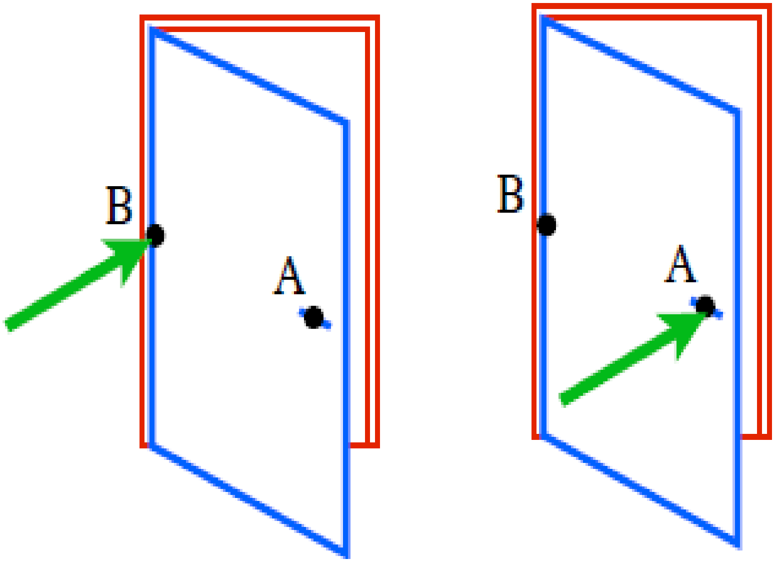
La résultante est donc **indépendante du point d'application** de l'effort.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

La résultante

Remarque : Pourquoi les poignées de portes sont-elles places à l'opposé des gonds ?



Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Le moment

Le moment d'une force $\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{I},2\rightarrow1}}$ appliquée en un point I par un solide 2 sur un solide 1, calculé en un point J est le vecteur lié $\overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{J},2\rightarrow1}}$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{J},2\rightarrow1}} = \overrightarrow{\mathrm{JI}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{I},2\rightarrow1}}$$

Unité = Newton-mètres (N.m).

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Le moment

Remarques :

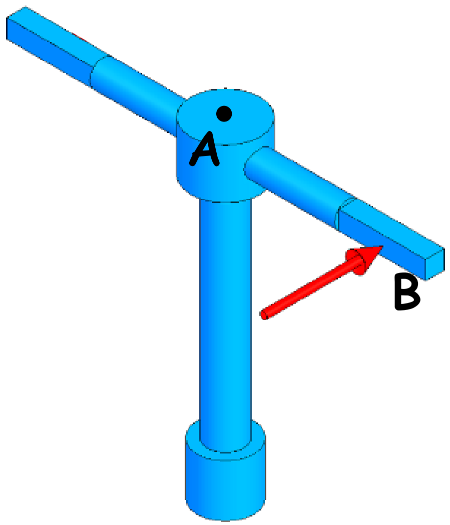
- $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow 1}}$ appliquée en un point *I* → $\overrightarrow{M_{I,2\rightarrow 1}} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow 1}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{JI}$ → $\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}} = \vec{0}$

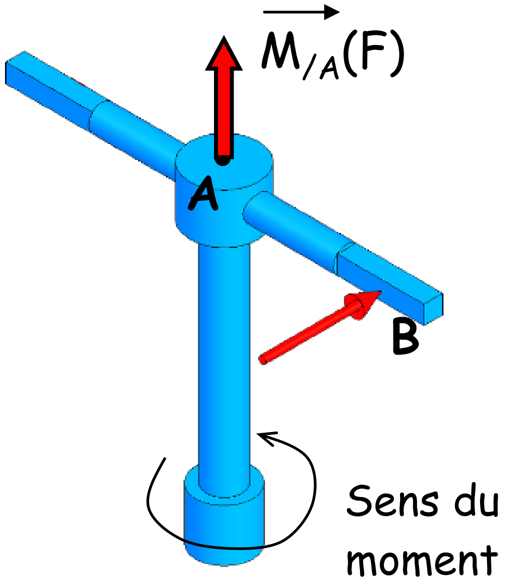
Interprétation physique : Le moment représente l'aptitude d'une force à faire tourner un solide autour d'un axe donné.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Le moment





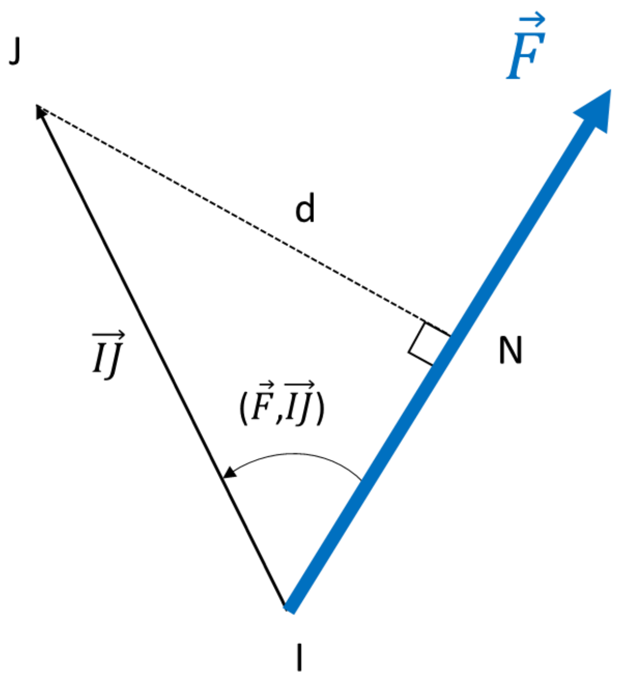
Interprétation physique : Le moment représente l'aptitude d'une force à faire tourner un solide autour d'un axe donné.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Le moment

Le bras de levier



$$\overrightarrow{M_{J,2\to1}} = \overrightarrow{JI} \wedge \vec{F}$$

N = projeté orthogonal de J sur le support de $\vec{F}$

$$\overrightarrow{M_{J,2\to1}} = \left(\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{NI}\right) \wedge \vec{F}$$

$\overrightarrow{NI}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{M_{J,2\to1}} = \overrightarrow{JN} \wedge \vec{F}$$

Par définition du produit vectoriel :

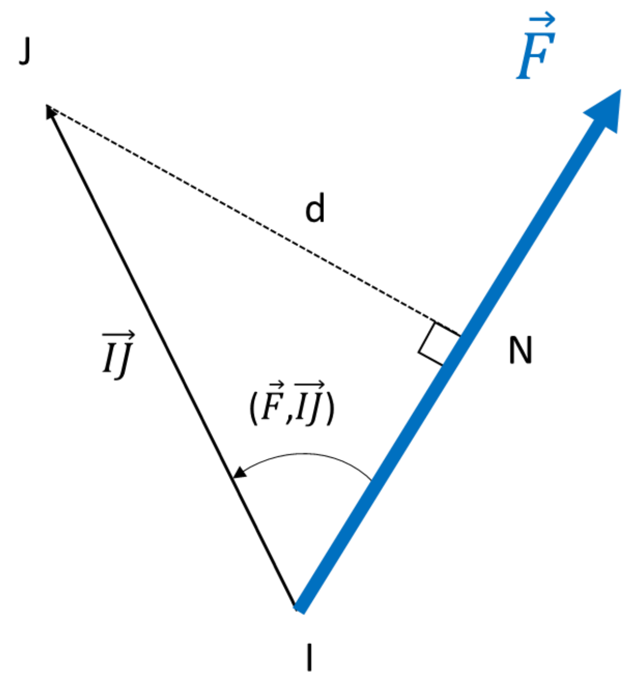
$$\left\|\overrightarrow{M_{J,2\to1}}\right\| = \left\|\overrightarrow{JN}\right\| \left\|\vec{F}\right\| \sin(\overrightarrow{JN},\vec{F}) = \left\|\overrightarrow{JN}\right\| \left\|\vec{F}\right\|$$

($\overrightarrow{JN}$ et $\vec{F}$ orthogonaux)

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Le moment



Le bras de levier

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{JN}}\right\| = d\ ;\ \left\|\vec{\mathrm{F}}\right\| = F\ ;\ \left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{J},2\rightarrow1}}\right\| = M_J,$$

$$M_J = Fd$$

d = plus courte distance entre J et le support de $\vec{\mathrm{F}}$ = bras de levier

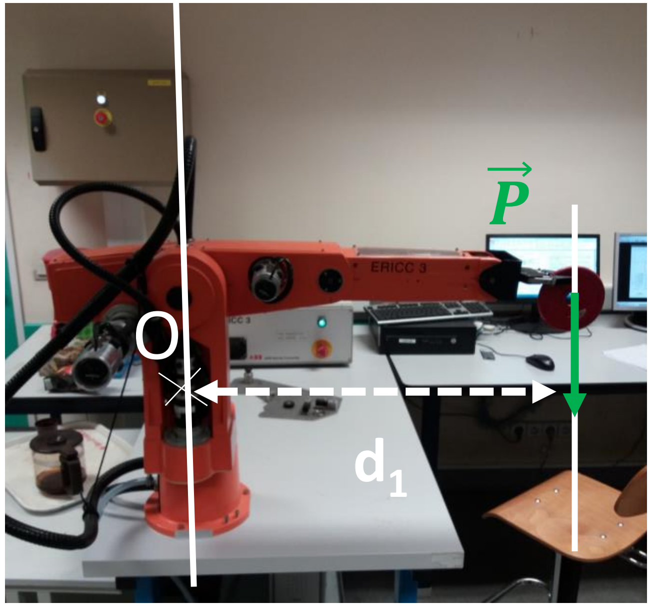
Conséquence :

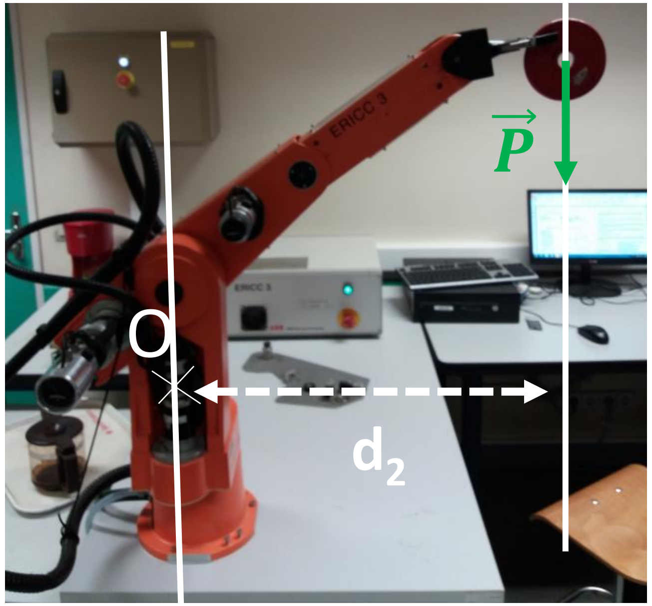
d grand → M_J grand → rotation du solide autour de l'axe $(J, \vec{z})$ → facile

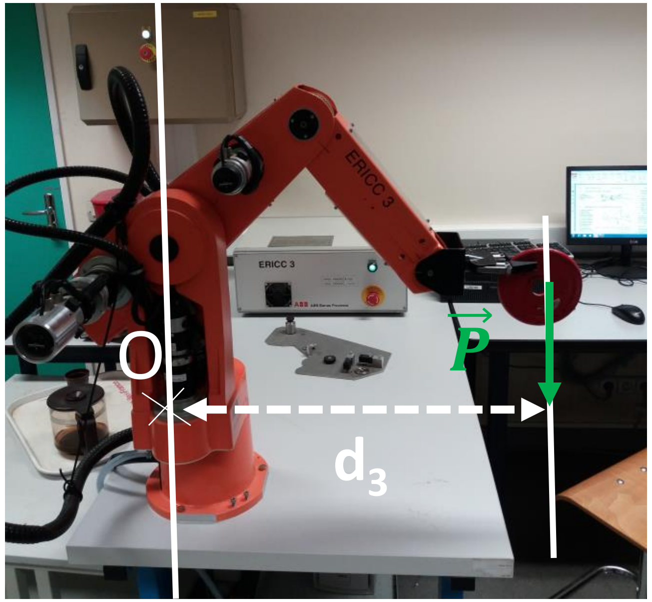
Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

<u>Exemple :</u> Détermination du moment de la pesanteur pour le robot ERICC3



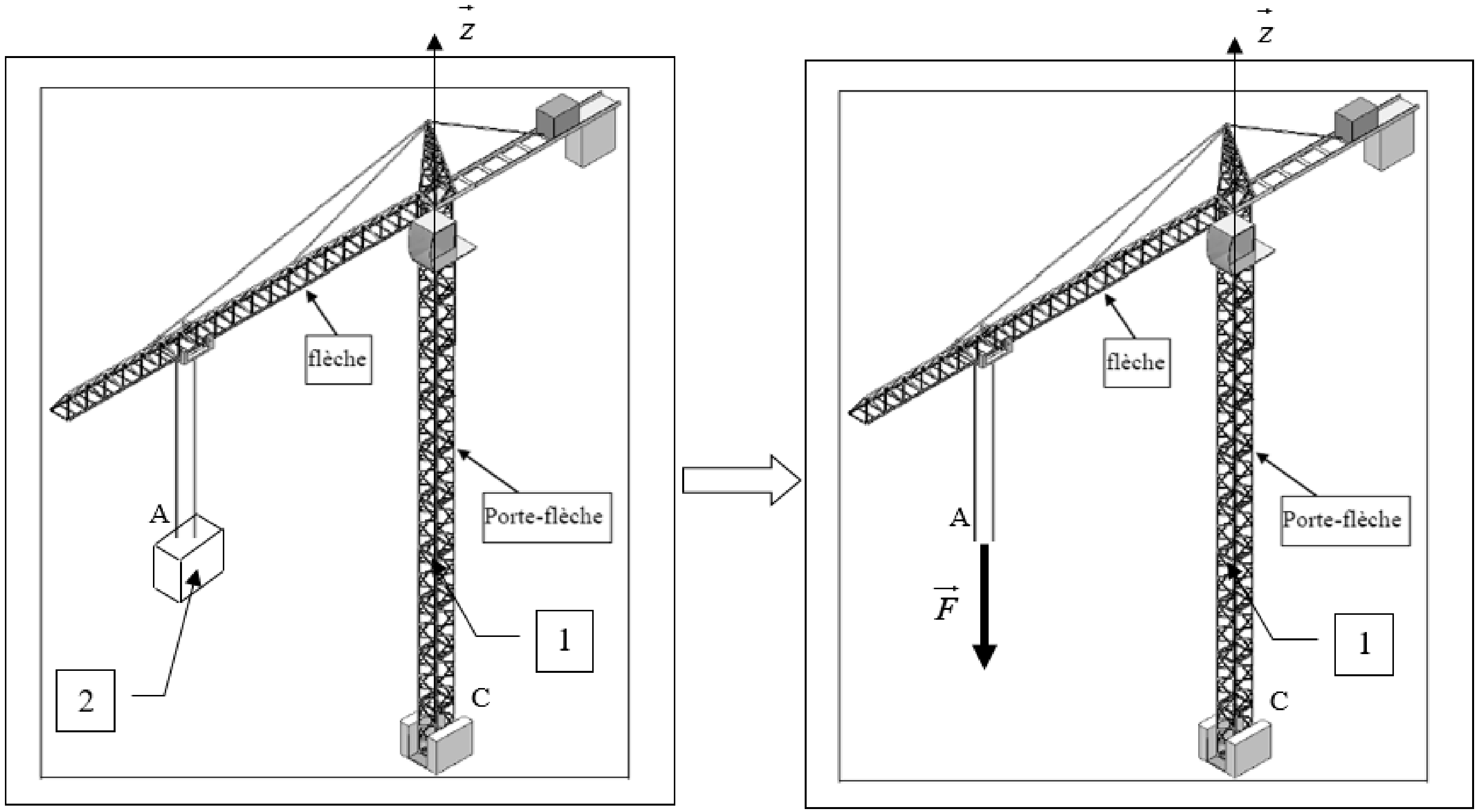




Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

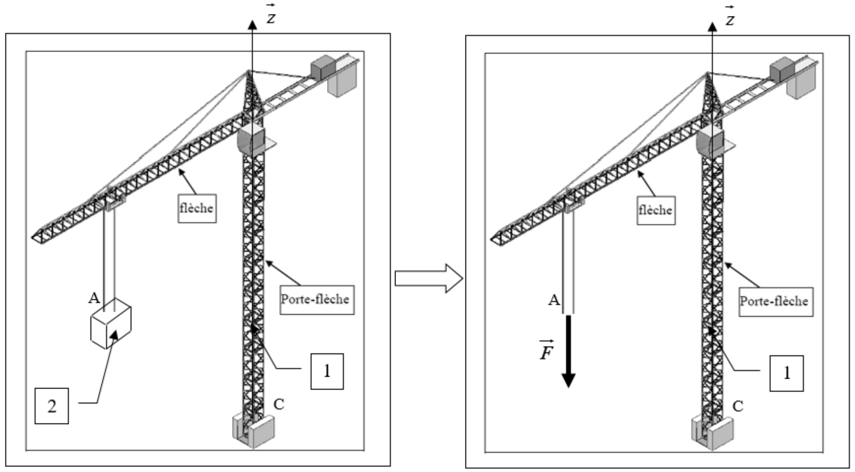
Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment



Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d’une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment



Action mécanique qui s’exerce au point A :

- Point d’application : point A
- Direction : verticale
- Sens : vers le bas
- Intensité : F = Mg

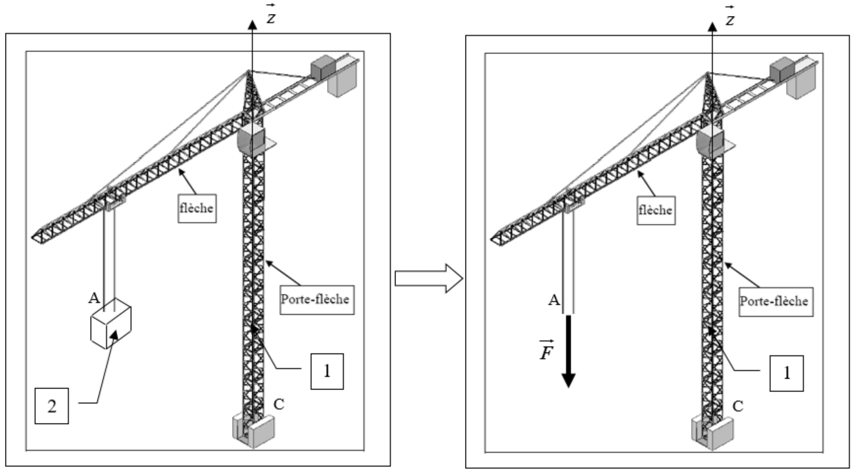
Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

$$\overrightarrow{R_{2\to1}} = \vec{F} = -M.g.\vec{z}\ (N)$$

Quel est l'effet de cette action mécanique au point C ?



$\overrightarrow{R_{2\to1}} = -M.g.\vec{z}$ supportée en C → effet de rotation qui aurait tendance à faire basculer la grue.

$$\overrightarrow{M_{C,2\to1}} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}\ (N.m)$$

Idem en B : $\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$.

$$\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \wedge \vec{F}$$

D'où $$\boldsymbol{\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = \overrightarrow{M_{C,2\to1}} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{F}}$$

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Conclusion :

Toute action mécanique peut être entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par un torseur.

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{C,2\to1}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} R_x & M_{cx} \\ R_y & M_{cy} \\ R_z & M_{cz} \end{Bmatrix}_{C,R}$$

$\overrightarrow{R_{2\to1}}$: Résultante du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1

$\overrightarrow{M_{C,2\to1}}$: Moment au point C du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1

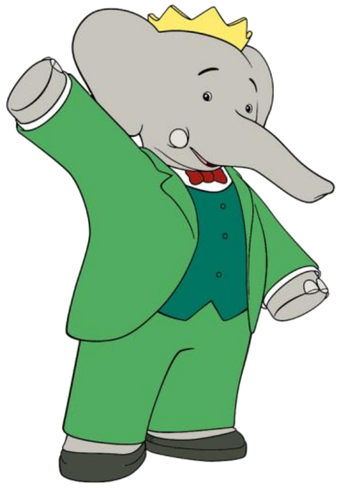
Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

$$\overrightarrow{M_{B,2\to 1}} = \overrightarrow{M_{A,2\to 1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{2\to 1}}$$

(BABAR)



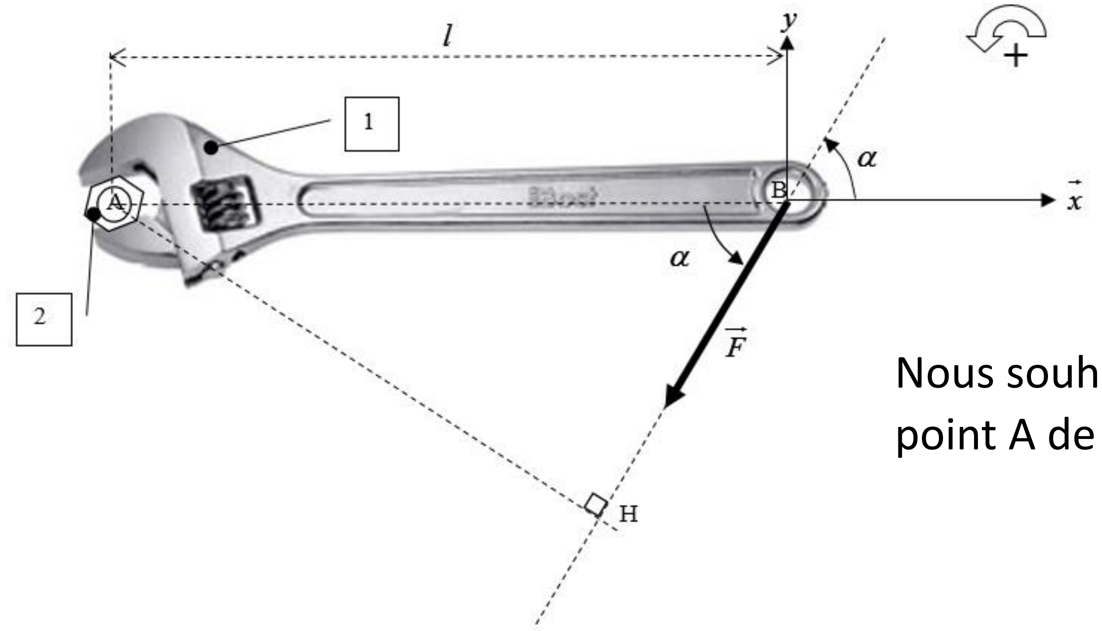
Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Exemple de calcul de torseur d'une action mécanique

Considérons une personne exerçant une action mécanique $\vec{F}$ sur une clé à molette au point B afin de serrer un écrou.



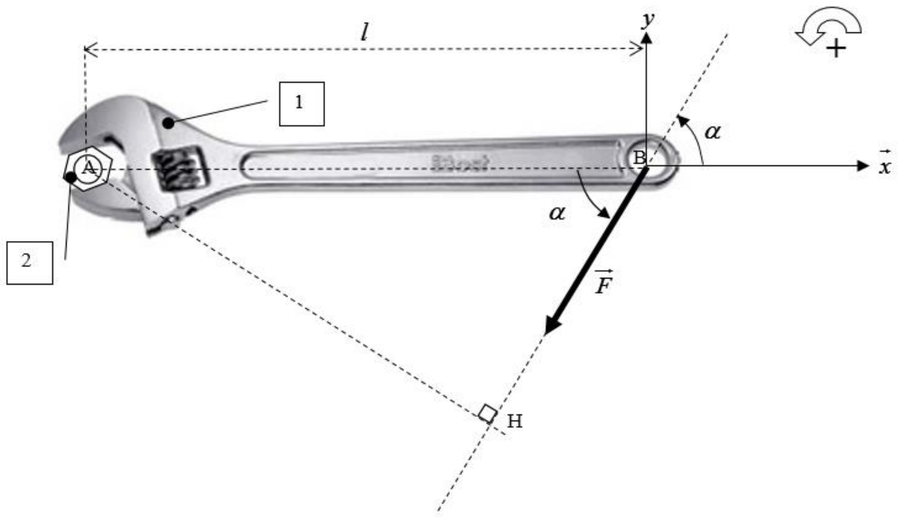
Nous souhaitons calculer le moment au point A de cette action mécanique.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Exemple de calcul de torseur d'une action mécanique



Par les torseurs

$$\{T_{main\to 1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{main\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{B,main\to 1}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

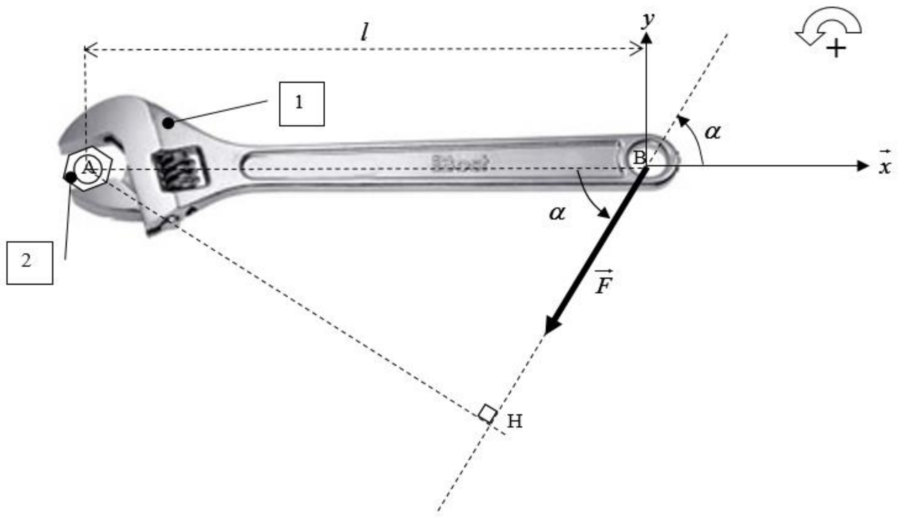
$$= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{main\to 1}} = \vec{F} \\ \overrightarrow{M_{A,main\to 1}} = \overrightarrow{M_{B,main\to 1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{main\to 1}} \end{Bmatrix}_A$$

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Exemple de calcul de torseur d'une action mécanique



Par les torseurs

$$\overrightarrow{M_{A,main\rightarrow 1}} = \vec{0} + l.\vec{x} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F.\cos\alpha \\ -F.\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l.F.\sin\alpha \end{pmatrix}$$

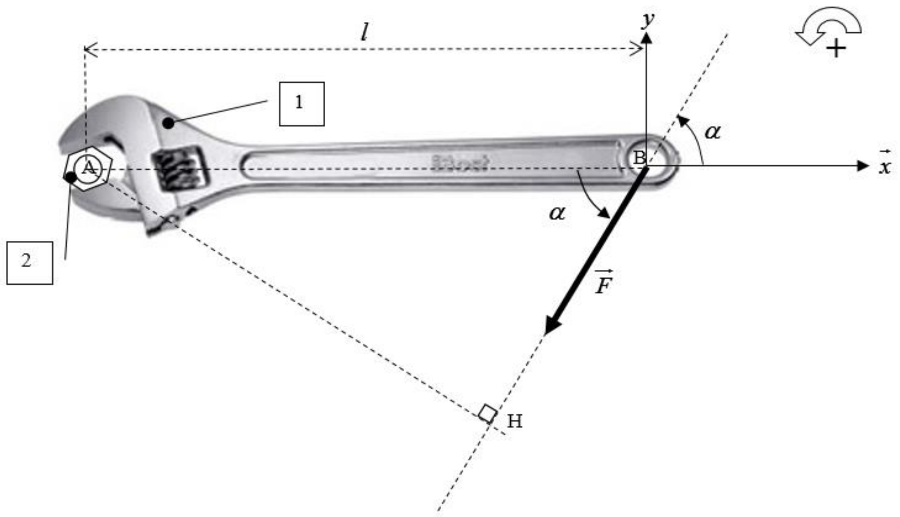
$$= -l.F.\sin\alpha\,.\vec{z}$$

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d’une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Exemple de calcul de torseur d’une action mécanique



Par la méthode du bras de levier

H = projeté orthogonal de A sur le support de la force $\vec{F}$

$$AH = l.\sin\alpha$$

Le signe du moment → sens de rotation potentiel induit par l’action mécanique $\vec{F}$ (sens négatif)

$$\overrightarrow{M_{A,main\rightarrow 1}} = -l.F.\sin\alpha\,.\vec{z}$$

Modélisation des actions mécaniques

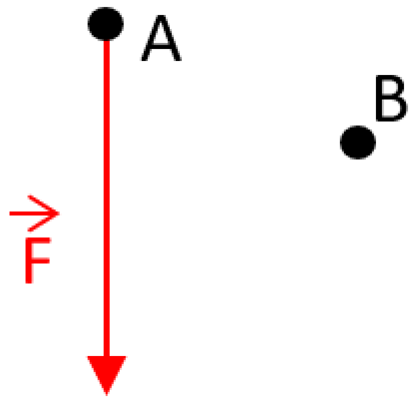
La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Torseurs particuliers

Un glisseur est un torseur associé à un vecteur lié.

$$\{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{ext\to S}}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ext\to S}}} \\ \vec{\boldsymbol{0}} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A}}$$



$$\{T_{ext\to S}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{ext\to S}} = \vec{F} \\ \overrightarrow{M_{B,ext\to S}} = \overrightarrow{M_{A,ext\to S}} + \overrightarrow{R_{ext\to S}} \wedge \overrightarrow{AB} \end{matrix}\right\}_B$$

En tout point M appartenant au support de la force $\vec{F}$, on aura $\overrightarrow{M_{M,ext\to S}} = \vec{0}$

Modélisation des actions mécaniques

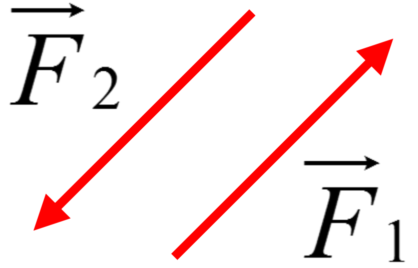
La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Torseurs particuliers

Torseur couple

Un torseur couple est un torseur à résultante nulle.



$$\{T_{ext\to S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,ext\to S}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}$$

La résultante est nulle, le moment est le même quel que soit le point de réduction du torseur.

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Complémentarité avec le torseur cinématique

Torseur cinématique L_Pivot:

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

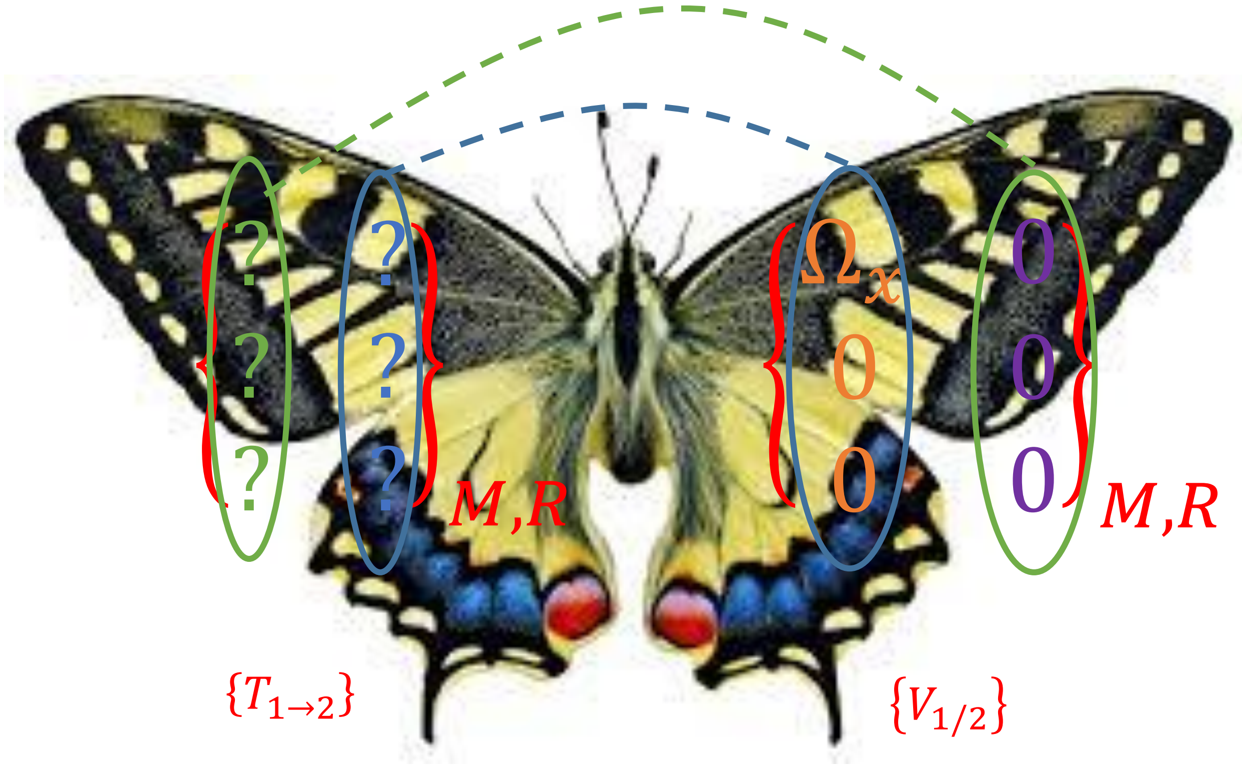
Torseur des actions mécaniques transmissibles :

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

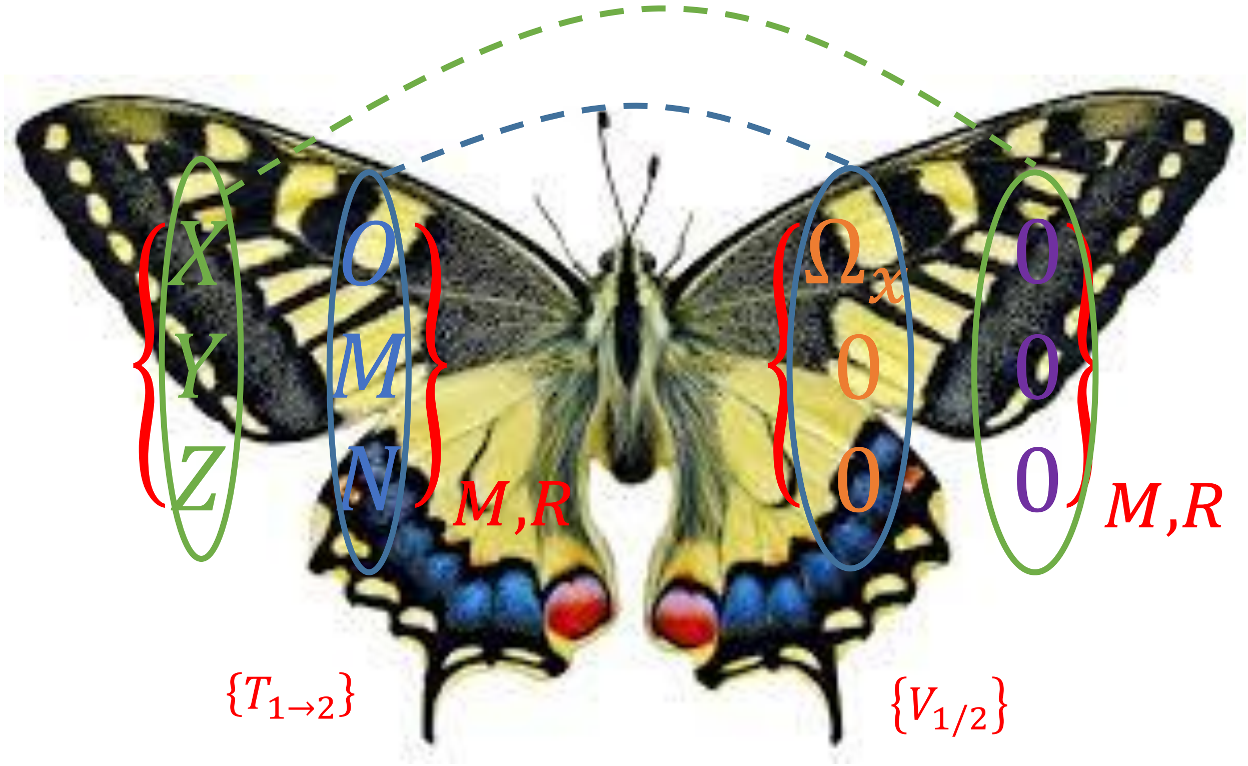
<u>Exemple :</u> Liaison Pivot d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

<u>Exemple :</u> Liaison Pivot d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :



Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Complémentarité avec le torseur cinématique

Si un mouvement est possible selon un degré de liberté, il ne sera pas possible de transmettre une action mécanique dans cette direction.

Réciproquement si un mouvement est impossible selon un degré de liberté, il sera possible de transmettre une action mécanique selon cette direction.

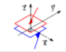
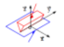
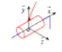
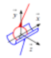
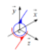
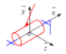
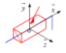
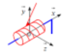
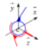
Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Complémentarité avec le torseur cinématique

Tableau récapitulatif des torseurs des AM de contact des liaisons parfaites

Liaison	Schématisation	Torseur cinématique	Torseur statique
Appui-plan		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M}{\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ 0 & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire-rectiligne		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M\in(O,\vec{y},\vec{z})}{\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ 0 & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot-glissant		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Ponctuelle		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M\in(I,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire-annulaire		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Rotule		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Glissière		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M}{\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Hélicoïdale		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{\forall M\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Avec $v_x = \frac{p}{2\pi}\omega_x$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & L_{1\to 2} \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Avec $X_{1\to 2} = -\frac{2\pi}{p}.L_{1\to 2}$
Rotule à doigt		$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Application aux problèmes plans

Modélisation plane :

- toutes les résultantes appartiennent alors au même plan $(\vec{x}, \vec{y})$ par exemple,
- tous les moments sont perpendiculaires à ce plan (direction $\vec{z}$).

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Modélisation des actions mécaniques

La résultante et le moment, second modèle

Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Application aux problèmes plans

Exemple : Pour un problème plan (O,x,y)

Liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Liaison glissière d'axe $(A, \vec{x})$

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{y})$

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$